Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques

PREMIERE EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Première composition

(Coefficient 2,5 - Durée : 5 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Dans ce problème, n désignera un entier naturel.
On notera, $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On identifiera selon les besoins un polynôme et la fonction polynôme associée.
On notera $[1 ; n]$ l'ensemble des entiers naturels de 1 à n.
E_n^* désignera l'espace vectoriel réel des formes linéaires sur E_n.

Partie I. Polynômes Orthogonaux.

I.1 Construction.

Pour tout $(P, Q) \in E^2$, on pose : $(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t).Q(t)dt$.

I.1.1 Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Dans tout ce qui suit, l'espace vectoriel E est muni de ce produit scalaire.

I.1.2. Montrer qu'il existe, une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$

vérifiant : $(*)$ $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) = n \\ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ le coefficient dominant de } P_n \text{ est } 1 \\ \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \text{ et } i \neq j,\ (P_i \mid P_j) = 0 \end{cases}$

I.1.3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n et E_{n-1} sont orthogonaux.

I.1.4. Montrer que, pour tout $n > 0$, P_n admet au moins une racine dans]-1; 1[

I.1.5. Soit $n \geq 2$. Montrer que P_n n'a pas de racine multiple dans]-1; 1[.
(indication : on supposera que $x_0 \in$]-1; 1[est une racine multiple de P_n, et en utilisant le polynôme $\frac{P_n(X)}{(X-x_0)^2}$ on arrivera à une contradiction.).

I.1.6. Soient n un entier ≥2, k le nombre de racines simples de P_n dans]-1; 1[et $x_1, x_2, \ldots x_k$ ces racines. Posons $Q(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - x_i)$.

En étudiant $\int_{-1}^{1} P_n(t).Q(t)dt$, montrer que : k = n.

I.2. Expressions des polynômes orthogonaux.

I.2.1. Soient h et g deux fonctions numériques de classe C^{n+1} sur [-1, 1].

Montrer que : $\forall x \in [-1, 1]$,

$$\int_{-1}^{x} g(t).h^{(n+1)}(t)dt = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[g^{(k)}(t)h^{(n-k)}(t)\right]_{-1}^{x} + (-1)^{n+1}\int_{-1}^{x} g^{(n+1)}(t)h(t)dt.$$

On pose, pour tout $n \geq 0$, et pour tout x réel, $L_n(x) = K_n \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, où K_n est une constante réelle dépendant de n.

I.2.2. Déterminer K_n, tel que : $L_n(1) = 1$. On notera encore L_n ces polynômes

I.2.3. Calculer $L_n(-1)$.

I.2.4. Déterminer L_n , lorsque $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

I.2.5. Déterminer le coefficient dominant de L_n en fonction de n.

I.2.6. Calculer pour tout (m, n) $\in \mathbb{N}^2$ et $m \neq n$, $(L_m \mid L_n)$.

I.2.7. Déterminer les expressions des polynômes solutions de (*) (cf I.1.2.) en fonction de L_n.

I.2.8. En déduire une nouvelle démonstration du résultat obtenu en I.1.6.

I.2.9. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{-1}^{1}(t^2-1)^n dt = (-1)^n \frac{(2^n.n!)^2}{(2n+1)!}.2$.

I.2.10. En déduire l'expression de : $(X^n \mid L_n)$.

I.2.11. Calculer : $(L_n \mid L_n)$.

I.3. Relation de récurrence pour L_n.

On suppose $n \geq 1$.

I.3.1. Montrer qu'il existe une unique famille de réels (α_k), $0 \leq k \leq n+1$, vérifiant :

$$X.L_n = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k . L_k$$

I.3.2. Calculer α_{n+1}.

I.3.3. Montrer que $\alpha_k = 0$ pour tout entier k, $k \leq n-2$, lorsque $n \geq 2$.

I.3.4. Calculer α_n et α_{n-1}.

I.3.5. En déduire une formule de récurrence vérifiée par les polynômes L_n.

I.4. Equation différentielle.

Soit l'application $T : E \to E$ définie par $T(P) = (X^2 - 1).P'' + 2.X.P'$.

I.4.1. Montrer que T est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

I.4.2. Montrer que $\forall (P, Q) \in E^2$, $(T(P) \mid Q) = (P \mid T(Q))$.

Soit $n > 0$, et $\mathcal{T}_n$ la restriction de T au sous espace E_n.

I.4.3. Montrer que $\mathcal{T}_n$ est un endomorphisme de E_n

I.4.4. Déterminer la matrice de $\mathcal{T}_n$, dans la base canonique de E_n

I.4.5. Démontrer que $\mathcal{T}_n$ est diagonalisable, et que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, préciser leurs dimensions.

I.4.6. Déterminer les valeurs propres de T et les sous espaces propres associés en fonction des polynômes L_k

Soit $n > 0$. On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$:

$(\mathscr{E}_n)$ $(1-t^2).y'' - 2t.y' + n.(n+1).y = 0$.

I.4.7. Montrer que $(\mathscr{E}_n)$ admet une unique solution polynomiale de degré n, de coefficient dominant : $\dfrac{(2n)!}{2^n.(n!)^2}$.

I.4.8. Soit $n \geq 2$. Prouver que : $L'_n - L'_{n-2} = C_n.L_{n-1}$, où C_n est une constante à déterminer.

I.4.9. En déduire, pour tout $n \geq 2$, les expressions de L'_n en fonction des polynômes L_k où $k < n$

On cherche maintenant des solutions de ($\mathscr{E}_n$) de la forme $y = u.L_n - v$, où u et v sont des fonctions de classe C^2 sur un intervalle I, ne contenant ni 1 et -1.

I.4.10. Montrer qu'un choix approprié de u, que l'on explicitera, ramène la recherche de ces solutions de ($\mathscr{E}_n$) à la résolution de :

($\mathscr{L}_n$) $(1-t^2).v'' - 2.t.v' + n(n+1).v = 2L'_n(t)$.

I.4.11. En utilisant l'endomorphisme T, montrer que ($\mathscr{L}_n$) n'a qu'une solution dans E_{n-1}, que nous noterons Q_n.

I.4.12. Exprimer Q_n en fonction des polynômes L_k , $0 \leq k \leq n-1$.

I.4.13. Déterminer alors les solutions de ($\mathscr{E}_n$) .

Partie II. APPLICATIONS

Pour $n \geq 1$, notons x_1 , x_2, ..., x_n les racines de L_n rangées en ordre croissant, et pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$, φ_k la forme linéaire de E^*_{n-1} définie par $\varphi_k(P) = P(x_k)$.
On pose $W = Vect(\varphi_1 , \varphi_2 ,..., \varphi_n)$, le sous espace vectoriel de E^*_{n-1} engendré par les formes linéaires φ_k pour $1 \leq k \leq n$.

II.1. Intégration et Polynômes

II.1.1 Déterminer l'orthogonal de W dans E_{n-1} , et en déduire que $\Phi = (\varphi_1 , \varphi_2, ..., \varphi_n)$ est une base de E^*_{n-1} .

II.1.2. Soit $(e_1 , e_2 , ..., e_n)$ la base de E_{n-1} dont Φ est la base duale.

Montrer que : pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $e_k(X) = \dfrac{L_n(X)}{(X - x_k).L'_n(x_k)}$

II.1.3. Soit φ la forme linéaire de E^*_{n-1}, définie par : $\varphi(P) = \int_{-1}^{1} P(t)dt$.

Montrer qu'il existe une unique famille $(\beta_k)_{1 \leq k \leq n}$ de réels, telle que

$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \beta_k . \varphi_k$.

II.1.4. Montrer que : pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\beta_k = \int_{-1}^{1} e_k(t)dt$

II.1.5. Soit $Q \in E_{2n-1}$. Montrer qu'il existe un unique couple $(S, T) \in E_{n-1}^2$ tel que $Q = S.P_n + T$

II.1.6. Montrer que : $\forall Q \in E_{2n-1}$, $\int_{-1}^{1} Q(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \beta_k Q(x_k)$

II.1.7. Montrer que, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\beta_k = \int_{-1}^{1} (e_k(t))^2 dt$.

II.2. Intégration de fonctions C^{2n}.

Soit f une fonction numérique de classe C^{2n} sur [-1, 1].

Soit $\Phi : E_{2n-1} \to \mathbb{R}^{2n}$ définie par $\Phi(P) = \left(P(x_i), P'(x_i)\right)_{1 \le i \le n}$

II.2.1. Montrer que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

II.2.2. En déduire qu'il existe un unique polynôme P de E_{2n-1} tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in \{0,1\}$, $P^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i)$.

II.2.3. Montrer que $\forall x \in [-1,1]$, il existe un réel $\alpha_x \in]-1,1[$, tel que

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(2n)}(\alpha_x)}{(2n)!} \cdot \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)^2.$$

II.2.4. En déduire que : $\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \beta_k f(x_k) + \int_{-1}^{1} \frac{f^{(2n)}(\alpha_t)}{(2n)!} \cdot \frac{L_n^2(t)}{a_n^2} dt$ où a_n est une constante que l'on précisera.

II.2.5. En déduire une majoration de : $\left| \int_{-1}^{1} f(t)dt - \sum_{k=1}^{n} \beta_k f(x_k) \right|$.

II.2.6. Calculer, en présentant les détails, une valeur approchée de $\int_0^1 e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ en prenant $n = 3$ et préciser une majoration de l'erreur.

Partie III. Polynômes L_n et Séries

Soit Q un polynôme de degré n à coefficients dans C, $n > 0$.

x, y, φ sont des réels donnés.

III.1. Montrer que : $\forall k \le n$, k entier naturel,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(x + iye^{i\varphi}) e^{-ki\varphi} d\varphi = \frac{(iy)^k}{k!} Q^{(k)}(x)$$

On suppose dans la suite que $|x| < 1$, et on pose. $y = \sqrt{1 - x^2}$

III.2. Montrer que : $\dfrac{(x + iye^{i\varphi})^2 - 1}{2iye^{i\varphi}} = x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\varphi$

III.3. Montrer que : $\forall x \in [-1, 1],\ L_n(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\varphi)^n \, d\varphi$

III.4. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [-1; 1],\ |L_n(x)| \leq 1$

III.5. Montrer que, pour x et t fixés, $|t| < 1$, la série $\sum_{n\geq 0} (x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\varphi)^n t^n$

converge normalement sur $[0; 2\pi]$.

III.6. Montrer que : $\forall x \in [-1; 1],\ \forall t, |t| < 1,$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x).t^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - t(x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\varphi)}$$

III.7. Montrer que : $\forall x \in [-1; 1],\ \forall t, |t| < 1,\quad \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x).t^n.$